

JÓZEF HOZER

Uniwersytet Szczeciński

TWIERDZENIE FRISCHA-WAUGHA-STONE'A A PYTANIE RUTKAUSKASA

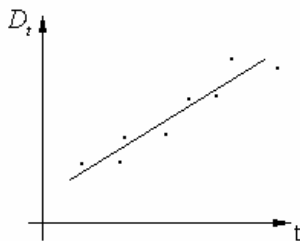
Zagadnienia, które zostaną tutaj poruszone, przedstawiono m.in. w pracach [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Konferencje i seminaria naukowe sprzyjają stawianiu pytań, na które odpowiedzi padają po paru, a nawet parunastu latach. Tak było z pytaniem i odpowiedzią, jakie zadał Rutkauskas (patrz [3], s. 278–283.)

Na konferencji naukowej ekonometryków w Zakopanem profesor Rutkauskas z Litewskiej Akademii Nauk postawił następujące pytanie:

Załóżmy, że:

- 1) dochód narodowy rośnie liniowo: $D_t = \delta_1 t + \delta_0$



- 2) dochód kształtują zjawiska I_t oraz M_t ,
- 3) gospodarka rozwija się w sposób zrównoważony (nie ma przypadków znaczących błędów gospodarczych, rażącej niegospodarności itp.)

Jak wyjaśnić i matematycznie opisać parametr δ_1 ?

Na konferencji miała miejsce ciekawa dyskusja. Jaka jest prawidłowa odpowiedź na to pytanie? Załóżmy, że zachodzi relacja:

$$D_t = \alpha_1 I_t + \alpha_2 M_t + \beta_1 t + \alpha_3 + U_t, \quad (1)$$

oraz, że I_t i M_t mają podobnie jak dochód trendy liniowe:

$$I_t = \delta_{11}t + \delta_{10} + I_t^*, \quad (2)$$

$$M_t = \delta_{21}t + \delta_{20} + M_t^*, \quad (3)$$

przy czym trendy rozpatrujemy z dokładnością do składnika losowego.

Wówczas prawidłowa odpowiedź matematyczna jest następująca:

$$\delta_1 = \delta_{11}\alpha_1 + \delta_{21}\alpha_2 + \beta_1. \quad (4)$$

Ekonomiczna interpretacja tego zapisu jest następująca:

Dynamika dochodu narodowego jest średnią ważoną dynamiki inwestycji i zatrudnienia skorygowaną parametrem, mierzącym efekt inercji dochodu narodowego. Przy czym wagami są odpowiednio parametry, mierzące efektywność inwestycji i zatrudnienia.

W przypadku większej liczby wpływających czynników ($i = 1, 2, \dots, k$) uogólnienie ma postać:

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^k \delta_{i1}\alpha_i + \beta_1. \quad (5)$$

Tak więc dynamika dochodu narodowego wynika z dynamiki zjawisk kształtujących dochód (δ_{i1} , $i = 1, 2, \dots, k$), z ich efektywności (α_i , $i = 1, 2, \dots, k$) oraz inercji gospodarki. Aby zmierzyć wpływ inercji, należy wprowadzić zmienną czasową do zbioru argumentów funkcji dochodu narodowego. Rolę czasu w opisie matematycznym funkcjonowania gospodarki przedstawiono w książce [5]. Obecność argumentu czasu przy opisie dochodu narodowego jest nieodzowna. Okazuje się, że obok efektywności, zatrudnienia i inwestycji dużą rolę w procesie wzrostu odgrywa inercja gospodarki (podobnie jak w dynamice takich obiektów, jak np. statki).

Odpowiedź nawiązuje do zasady pięciokąta źródeł sił sprawczych: tempus, locus, homo, casus et fortuna regit factum. Możemy uznać, że przy stałym miejscu odpowiedź uwzględnia cztery elementy pięciokąta: miejsce, zdarzenia, czas, przypadek. Pełne objaśnienie zmian dochodu narodowego wymagałoby badań ekonometrycznych z uwzględnieniem wpływu człowieka. Kształtowanie dochodu narodowego zależy bowiem od ludzi (skłonność do oszczędzania, konsumpcji, dyscypliny pracy, itp.)

Relację (1) między dochodem narodowym a zjawiskami go kształtującymi rozpatrzmy pod kątem sensowności dla Polski za lata 1989 – 1999. Dane o dochodzie narodowym, inwestycjach i zatrudnieniu podano w tablicy 1, graficzne przedstawienie trendów tych zmiennych pokazano na rysunkach 1, 2 oraz 3. Widzimy, że dochód rośnie liniowo, inwestycje mogą być opisane trendem liniowym, natomiast

zatrudnienie waha się. Widoczny jest brak korelacji między dochodem a zatrudnieniem, w związku z tym oszacujemy relacje:

$$Y_t = \alpha_1 I_t + \beta_1 t + \beta_0 + U_t, \quad (6)$$

$$Y_t = \delta_1 t + \delta_0 + Y_t^*, \quad (7)$$

$$I_t = \delta_{11} t + \delta_{10} + I_t^*, \quad (8)$$

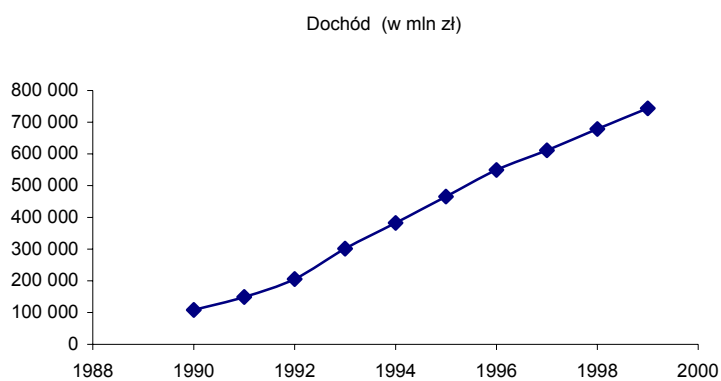
gdzie U_t, Y_t^*, I_t^* są składnikami losowymi.

Tablica 1

Dochód narodowy, inwestycje i zatrudnienie w Polsce w latach 1989–1999

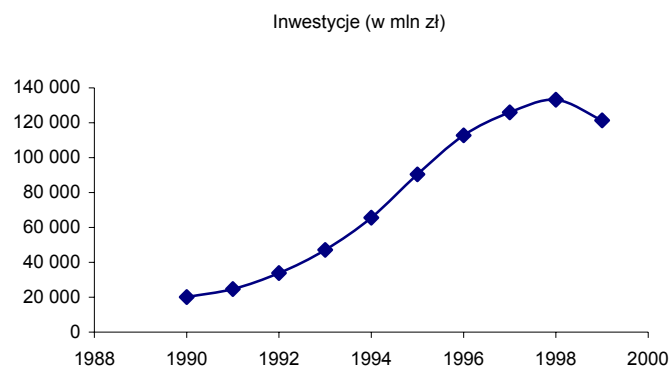
Rok	Y_t (w mln zł)	I_t (w mln zł)	Z_t (w tys. osób)
1989	70 501,86	16 883,70	17 558,0
1990	108 219,20	20 159,70	16 484,7
1991	149 186,20	24 715,90	15 772,3
1992	205 661,50	33 865,10	15 356,5
1993	301 353,60	47 144,70	15 117,5
1994	382 548,40	65 622,00	15 281,9
1995	465 668,10	90 437,70	15 324,5
1996	549 444,50	112 813,50	15 841,9
1997	611 552,40	125 954,40	16 249,5
1998	678 631,80	133 160,20	16 267,1
1999	743 620,50	121 362,90	16 008,9

Źródło: Dane statystyczne GUS.



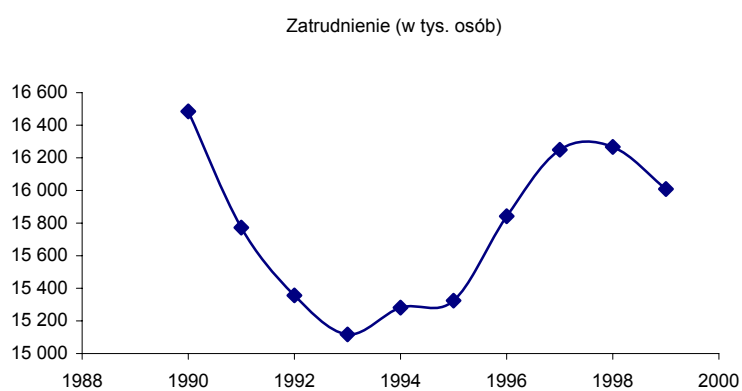
Rys. 1. Trend dochodu narodowego w latach 1989 – 1999

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 2. Trend inwestycji w latach 1989–1999

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 3. Trend zatrudnienia w latach 1989–1999

Źródło: Opracowanie własne.

Oszacowane parametry są następujące:

$$\hat{Y}_t = \underline{1,004651697}I_t + \underline{60\,111,68814}t + 11\,090,1088, \quad \varphi^2 = 0,21, \quad (9)$$

$$\hat{Y}_t = \underline{74\,433,80485}t + 10\,202,69333, \quad (10)$$

$$I_t^* = \underline{14\,255,80303}t - 883,306667. \quad (11)$$

(Istotne parametry podkreślono).

Widzimy, że zachodzi (4), czyli:

$$74\,433,80485 = 1,004651697 \cdot 14\,255,80303 + 60\,111,68814.$$

Powyższa odpowiedź była możliwa na bazie twierdzenia Frischa-Waughy-Stone'a przytoczonego i omówionego w pracach [3], [5].

Twierdzenie Frischa-Waughy

Estymacja parametrów liniowego równania regresji metodą najmniejszych kwadratów na podstawie odchylenia od trendów liniowych daje takie same rezultaty, jakie otrzymuje się po wprowadzeniu do równania zmiennej czasowej t . Szacując parametry modelu:

$$Y_t = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_{it} + \beta_1 t + \beta_0 + u_t \quad (12)$$

i modelu:

$$Y_t^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_{it}^* + u_t \quad (13)$$

otrzymujemy takie same rezultaty, jeżeli:

$$Y_t = \delta_1 t + \delta_0 + Y_t^* \quad (14)$$

oraz

$$X_{it} = \delta_{1i} t + \delta_{0i} + X_{it}^* \quad (15)$$

gdzie:

Y_t^* , X_{it}^* są odchyleniami od trendów.

W pracy [1, s. 15] wykazano, że pomiędzy parametrami: δ_1 , δ_{1i} , α_i , β_1 zachodzi związek:

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{1i} + \beta_1 .$$

Uogólnienia tego twierdzenia dokonał R. Stone [6], publikując tekst w 1961 roku w „Przeglądzie Statystycznym”, za sprawą prof. Pawłowskiego.

Twierdzenie Stone'a mówi, że estymatory uzyskane metodą najmniejszych kwadratów dla regresji jednoczesnej i skorygowanej są identyczne.

R. Stone przyjmuje funkcje regresji jednoczesnej:

$$Y = [X_1 X_2] \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + U^* \quad (16)$$

gdzie Y jest wektorem kolumnowym obserwacji zmiennej endogenicznej; X_1 i X_2 są rozłącznymi macierzami obserwacji na zmiennych objaśniających; γ_1 i γ_2 są wektorami kolumnowymi parametrów funkcji regresji; U^* jest wektorem składników losowych.

Funkcję regresji liniowej zmiennych X_1 i X_2 oznaczamy jako:

$$X_1 = X_2 A + E, \quad (17)$$

gdzie A jest macierzą parametrów funkcji regresji; E jest macierzą składników losowych.

Oznaczając dalej przez Z różnicę między X_1 i $X_2 A$ (gdzie macierz A została oszacowana klasyczną metodą najmniejszych kwadratów) otrzymamy równanie regresji skorygowanej:

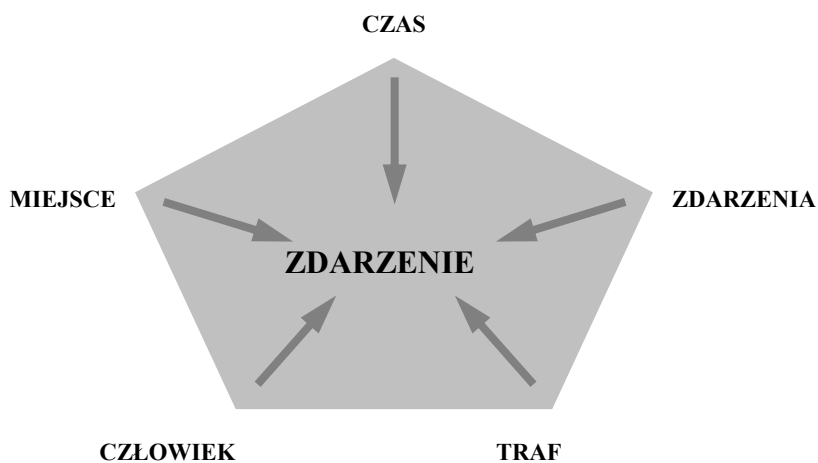
$$Y = Zc + V, \quad (18)$$

R. Stone wykazał, że jeżeli parametry γ_1 , c i A zostały oszacowane za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów, to zachodzi tożsamość:

$$\gamma_1 = \hat{c}. \quad (19)$$

Twierdzenie Frischa-Waugh-Stone'a wydaje się mieć fundamentalne znaczenie w modelowaniu zjawisk ekonomicznych. W literaturze przedmiotu jest jednak dość rzadko eksplorowane.

Zasadność odpowiedzi na pytanie Rutkauskasa opiera się również na fundamentalnym spostrzeżeniu zawartym w pięciokącie źródeł sił sprawczych, który przedstawiono i omówiono w pracach [2], [3], [4].



Rys. 4. Uniwersalny pięciokąt źródeł sił sprawczych

Źródło: Opracowanie własne.

Każdy fakt może mieć źródło sprawcze w upływie czasu, w zmianie miejsca, w zdarzeniach wcześniejszych lub współistniejących lub też w przypadku. I każdy model ekonometryczny zjawiska powinien to uwzględnić. Dla danych czasowych ważną zmienną objaśniającą powinien być czas, a dla danych przekrojowych miejsce.

Ignorowanie tego postulatu stanowi jedno z źródeł niepowodzeń w aplikacjach modeli ekonometrycznych.

Bibliografia

- [1] Frisch M., Waugh F., *Partial time regressions as compared with individual trends*, „Econometrics” 1933, nr 1
- [2] Hozer J., *Tempus locus homo casus et fortuna regit factum. Zbiór esejów ekonomicznych*, Wydawnictwo Instytutu Analiz, Diagnoz i Prognoz Gospodarczych w Szczecinie, Szczecin 2003
- [3] Hozer J., *Matematyczno-ekonomiczne modele funkcjonowania gospodarki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2004
- [4] Hozer J., Doszyń M., *Ekonometria skłonności*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2004
- [5] Hozer J., Zawadzki J., *Zmienna czasowa i jej rola w badaniach ekonometrycznych*, Polskie Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1990
- [6] Stone R., *Uogólnienie twierdzenia Frischa-Waughy*, „Przegląd Statystyczny” 1962, nr 4