Krzysztof Jajuga
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

MODELOWANIE STRUKTURY TERMINOWEJ STÓP PROCENTOWYCH – WYZWANIE DLA EKONOMETRII

1. Modele makroekonomiczne a modele stóp procentowych – wprowadzenie

Nie do podważenia jest teza, iż ekonometria jest tym obszarem nauk ekonomicznych, który wywarł największy wpływ na rozwój teorii ekonomicznych. Dzieje się tak dlatego, iż narzędzia ekonometryczne służą do weryfikacji hipotez formułowanych przez teorię ekonomii, a czasem wręcz pomagają w sformułowaniu tych hipotez.

Makroekonomia jest jednym z obszarów ekonomii, w których udział narzędzi ekonometrycznych jest szczególnie istotny. W ostatnich kilkunastu latach w badaniach makroekonomicznych obserwuje się zbliżenie dwóch podejść, które dawniej były traktowane jako odrębne obszary. Pierwsze podejście (umownie zwane tutaj „popytowym") jako punkt wyjścia zakłada stronę popytową rynku i całej gospodarki. W myśl tego podejścia (mocno argumentowanego na gruncie ekonomii Keynesowskiej) w krótkim okresie wszelkie zmiany w gospodarce wynikają ze zmian w popycie. Drugie podejście (umownie zwane tutaj „podażowym") jako punkt wyjścia z kolei zakłada stronę podażową rynku. Zgodnie z tym podejściem w długim okresie wszelkie zmiany w gospodarce zależą od zmian w podaży.

Oprócz zbliżenia powyższych dwóch podejść dochodzi jeszcze rola polityki ekonomicznej, a przede wszystkim polityki monetarnej, która (między innymi) poprzez kształtowanie stóp procentowych wpływa na zjawiska gospodarcze, przede wszystkim od strony podażowej, po części wyjaśniając kształtowanie się cykli koniunkturalnych.

Nakreślona powyżej integracja podejść w badaniach makroekonomicznych, wraz z dominującą rolą narzędzi ekonometrycznych, po raz pierwszy znalazła swój najpełniejszy wyraz w dwóch fundamentalnych publikacjach Finna Kydlanda i Edwarda Prescotta, laureatów Nagrody Nobla w dziedzinie nauk ekonomicnych z 2004 r., dotyczących powiązania polityki ekonomicznej z cyklami koniunkturalnymi (Kydland, Prescott 1977, 1982). Kydland i Prescott dowiedli, że występuje niespójność czasowa sekwencyjnie prowadzonej polityki ekonomicznej, co wynika z faktu, iż deklarowana przez zarządzających gospodarką w długim okresie polityka ekonomiczna nie jest realizowana, gdyż w międzyczasie zmieniają się oczekiwania podmiotów (gospodarstw domowych, przedsiębiorstw), dotyczące tej polityki oraz zmieniają się sami realizujący tę politykę.

Jeśli zaś chodzi o cykle koniunkturalne, to Kydland i Prescott wykazali, że istotną rolę odgrywają tu wahania krótkoterminowe, na które wpływ mają inne czynniki niż popytowe. Tymi czynnikami są: zmienność rozwoju technologicznego, a także szoki podażowe, wywołane rosnącymi cenami, zwłaszcza ropy naftowej. Warto dodać, iż w swojej analizie obaj uczeni wykorzystali neoklasyczny model wzrostu, integrując w ten sposób teorię wzrostu z teorią cykli koniunkturalnych.

Modelowanie makroekonomiczne zawsze było w centrum zainteresowania ekonomistów, w tym ekonometryków. Przede wszystkim dotyczy to wspomnianych już modeli wzrostu. W ostatnich kilkunastu latach modelowanie wzrostu gospodarczego charakteryzuje się dynamicznym rozwojem. Niewątpliwie duże znaczenie miały tu nowe teorie wzrostu gospodarczego, w znakomity sposób rozwijające modele klasyczne, przede wszystkim model Solowa (1956). Chodzi tu przede wszystkim o teorię endogenicznego wzrostu, zaproponowaną przez Romera (1986). Wydaje się jednak, iż w tych klasycznych i nowych modelach wzrostu stosunkowo niewielkie znaczenie przywiązuje się do zjawisk finansowych, zwłaszcza stóp procentowych. Naszym zdaniem istnieją następujące argumenty, przemawiające za integracją modeli wzrostu z modelami stóp procentowych:

– jednym z fundamentalnych czynników wzrostu jest kapitał, zaś popyt na kapitał oraz podaż kapitału są funkcjami stopy procentowej;
– stopy procentowe są zasadniczym elementem polityki pieniężnej, która, prowadzona w długim okresie, ma istotne znaczenie, jeśli chodzi o stronę podażową, determinującą wzrost gospodarczy, jak również pośrednio wpływa na stronę popytową.

W tym artykule przedstawimy, zarówno syntetycznie, jak i kompleksowo, podstawowe modele stóp procentowych. W naszym przekonaniu mogą być one zintegrowane z modelami makroekonomicznymi, zwłaszcza z modelami wzrostu.

Kategoria stopy procentowej jest niewątpliwie jednym z podstawowych i najbardziej istotnych parametrów rynku finansowego i całej gospodarki, jednak sam termin „stopa procentowa” jest bardzo ogólny. W teorii i praktyce występuje co najmniej kilka rodzajów stóp procentowych, dla których konstruuje się modele. Przedstawimy je teraz w sposób syntetyczny.

Podstawowa stopa procentowa, która podlega modelowaniu, jest to stopa *spot*, inaczej zwana stopą zerokuponową lub natychmiastową. Określona jest ona w od-

niesieniu do inwestycji o nakładzie początkowym P, wartości końcowej FV, nieprzynoszącej żadnych innych przepływów pieniężnych.
Stopa *spot* określona jest następująco:
1. W przypadku inwestycji poniżej roku (na rynku pieniężnym):

$$r_t = \frac{FV - P}{P} \cdot \frac{T}{t},$$

gdzie:
t – liczba dni trwania inwestycji,
T – umowna liczba dni w roku (zazwyczaj 360).

2. W przypadku inwestycji trwającej co najmniej rok (na rynku kapitałowym):

$$r_n = \left(\frac{FV}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1,$$

gdzie:
n – liczba lat trwania inwestycji.

Druga podstawowa stopa procentowa, która może podlegać modelowaniu, to stopa *forward*, zwana stopą terminową. Jest to stopa znana w chwili obecnej, lecz dotycząca okresu rozpoczynającego się w przyszłości i trwającego pewien czas. Wyznacza się ją na podstawie dwóch stóp *spot*. Jest ona określona następująco:
1. W przypadku inwestycji poniżej roku (na rynku pieniężnym):

$$r_{s,v} = \left(\frac{1 + r_m \frac{m}{T}}{1 + r_s \frac{s}{T}} - 1\right) \cdot \frac{T}{v},$$

gdzie:
$r_{s,v}$ – stopa terminowa v-dniowa za s dni,
r_s – stopa *spot* s-dniowa,
r_m – stopa *spot* m-dniowa ($m=s+v$),
T – umowna liczba dni w roku (zazwyczaj 360).

2. W przypadku inwestycji trwającej co najmniej rok (na rynku kapitałowym):

$$r_{s,v} = \left(\frac{(1 + r_m)^m}{1 + r_s)^s}\right)^{1/v} - 1,$$

gdzie:
$r_{s,v}$ – stopa terminowa v-letnia za s lat,
r_s – stopa *spot* s-letnia,
r_m – stopa *spot* m-letnia ($m=s+v$).

Jeśli chodzi o stopy terminowe w przypadku inwestycji długookresowej, to najczęściej rozpatrywane są stopy roczne, oznaczane jako $r_{s,1}$. Można zauważyć również, że formalnie stopa terminowa, dotycząca okresu rozpoczynającego się obecnie (w chwili zerowej), jest niczym innym jak stopą *spot*.

W teorii stóp procentowych wyróżnia się jeszcze stopy chwilowe. Są to graniczne stopy *spot* i *forward*, dotyczące nieskończenie krótkich okresów, określone następująco:

– chwilowa stopa natychmiastowa (*instantaneous spot rate*), inaczej zwana stopą krótkoterminową (*short rate*):

$$r(t) = \lim_{t \to 0} r_t ,$$

– chwilowa stopa terminowa (*instantaneous forward rate*), określona dla dowolnego momentu w przyszłości:

$$r(s, t) = \lim_{t \to 0} r_{s,t} .$$

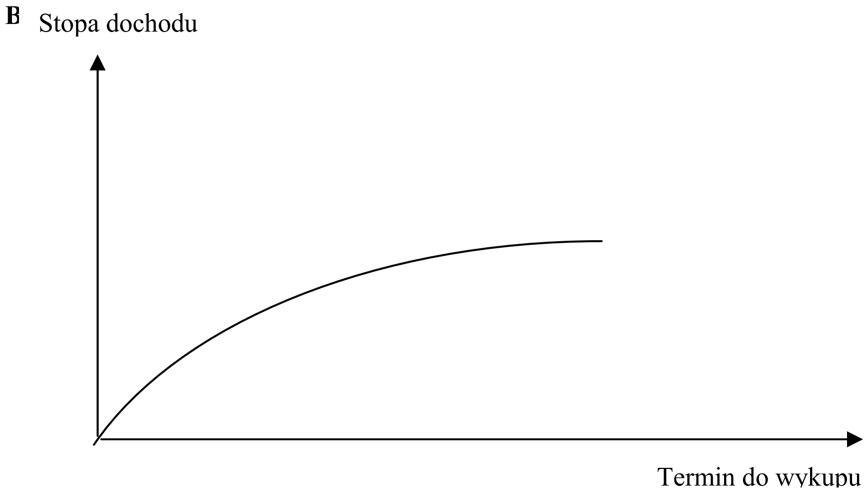
Zauważyć można również, że chwilowa stopa terminowa wyznaczona dla chwili obecnej, czyli okresu zerowego, jest niczym innym jak chwilową stopą natychmiastową (*spot)*.

W praktyce właściwie żadna z powyższych stóp nie jest obserwowana bezpośrednio. Do określenia stóp *spot*, a następnie na ich podstawie stóp *forward*, wykorzystywane są stopy procentowe obserwowane bezpośrednio na rynku. Zaliczamy do nich:

– w przypadku okresów krótszych niż rok: stopy rynku międzybankowego (np. WIBOR, LIBOR, Euribor), stopy rentowności bonów skarbowych, stopy transakcji *repo* na rynku pieniężnym i stopy kontraktów *swap*;
– w przypadku okresów dłuższych: stopy dochodu obligacji, czyli *Yield To Maturity* (YTM).

Przy tym stopy krótkookresowe są dane jako stopy zerokuponowe, a więc determinują bezpośrednio stopy *spot* (przynajmniej w odniesieniu do podstawowych okresów). Z kolei stopy długookresowe otrzymywane są na podstawie obligacji kuponowych (z odsetkami), a więc muszą być odpowiednio transformowane w celu uzyskania stóp *spot*. Problem ten jest przedmiotem rozważań w dalszej części tego artykułu. Dodajmy tu jeszcze, że pewnym przybliżeniem chwilowej stopy natychmiastowej jest stopa jednodniowa typu *overnight*, określona na rynku międzybankowym.

Najważniejszym problemem w teorii stóp procentowych jest zagadnienie struktury terminowej stóp procentowych (*term structure of interest rates*), zwane również zagadnieniem krzywej dochodowości lub krzywej stopy dochodu (*yield curve*). Struktura terminowa stóp procentowych jest to zależność stóp procentowych (zwłaszcza stóp dochodu dłużnych instrumentów finansowych) od terminu do wykupu, czyli od długości okresu inwestycji. Przykładowa postać krzywej dochodowości przedstawiona jest na rysunku 1.



Rys. 1. Krzywa dochodowości

Źródło: Opracowanie własne.

Jak widać na rysunku 1, tutaj krzywa dochodowości ma postać krzywej rosnącej, tzn. im dłuższy okres, tym wyższa stopa dochodu (wyrażona w skali rocznej). Przypadek ten nosi nazwę normalnej struktury stóp procentowych.

Zagadnienie modelowania struktury terminowej stóp procentowych jest to zasadniczy problem o charakterze teoretycznym i praktycznym. Teoretyczne znaczenie tego zagadnienia jest duże, gdyż, po pierwsze, nie zostało ono rozwiązane w sposób zadowalający, po drugie, modele struktury terminowej stóp procentowych są wykorzystywane w wielu innych zagadnieniach teoretycznych, np. w wycenie instrumentów dłużnych i instrumentów pochodnych na stopę procentową. Również w praktyce znajomość struktury terminowej stóp procentowych jest istotna, gdyż pozwala na podejmowanie efektywnych decyzji dotyczących inwestowania, finansowania i zarządzania ryzykiem stopy procentowej.

Powyżej przedstawiono kilka rodzajów stóp procentowych. Wynika z tego, iż można mówić o kilku rodzajach struktury terminowej stóp procentowych, czyli kilku rodzajach krzywej dochodowości. Do najważniejszych rodzajów należą:

1. Krzywa stóp *spot* (*spot yield curve*). Jest to najważniejszy rodzaj krzywej. Mówiąc „struktura terminowa stóp procentowych” bez bliższego sprecyzowania, ma się na myśli właśnie tę krzywą konstruowaną w odniesieniu do instrumentów skarbowych, czyli wolnych od ryzyka. Otrzymane w ten sposób stopy *spot* są właśnie stopami wolnymi od ryzyka.
2. Krzywa stóp forward (*forward yield curve*). Jest ona otrzymywana na podstawie krzywej stóp *spot*. Teoretycznie można wyznaczyć bardzo wiele krzywych tego typu, po jednej dla każdego momentu, od którego zaczyna się okres. W praktyce jednak rozważa się tylko jedną krzywą. Powstaje ona przez wybranie z każdej możliwej krzywej tylko jednej stopy, mianowicie stopy rocz-

nej. Oznacza to, że kolejne punkty na krzywej, odpowiadające odpowiednim momentom, to stopy terminowe $r_{s,1}$.

3. Krzywa stóp dochodu obligacji (*YTM yield curve*). Ta krzywa jest obserwowana w praktyce, gdyż powstaje na podstawie stóp dochodu obligacji (kuponowych) występujących na rynku.
4. Krzywa stóp dochodu obligacji wycenianych według wartości nominalnej (*par yield curve*). W zasadzie ta krzywa nie jest obserwowana w praktyce, ponieważ na rynkach finansowych obligacje zdecydowanie częściej wyceniane są z dyskontem lub premią, a nie według wartości nominalnej. W teorii krzywa ta jest wyznaczana, gdyż z kolei na jej podstawie określa się krzywą stóp *spot*.
5. Krzywa chwilowych stóp terminowych (*instantaneous forward yield curve*). Ma ona znaczenie teoretyczne do modelowania dynamiki stóp procentowych.

Wszystkie powyższe krzywe wyznacza się najczęściej dla stóp dochodu dłużnych instrumentów skarbowych. Są to zatem stopy wolne od ryzyka. Oprócz tego krzywe dochodu można wyznaczać dla stóp dochodu innych instrumentów dłużnych. Są to zatem stopy zawierające premię za ryzyko, np. za ryzyko kredytowe emitenta posiadającego kategorię ratingową BBB. Jeśli dla dowolnego momentu wyznaczy się różnice między stopami dochodu instrumentów dłużnych emitenta kategorii BBB a stopami dochodu wolnymi od ryzyka, wówczas otrzymujemy tzw. strukturę terminową *spreadu* kredytowego (*term structure of credit spread*).

Wszystkie powyżej przedstawione pojęcia dotyczą **poziomu** stóp procentowych. W modelach stóp procentowych (podobnie jak w modelach innych instrumentów finansowych, na przykład akcji czy walut) istotną rolę odgrywa również **zmienność** (*volatility*) tych stóp. W takiej sytuacji każda stopa procentowa traktowana jest jako zmienna losowa, zaś odchylenie standardowe tej zmiennej informuje o zmienności. Określając dla każdego momentu to odchylenie standardowe, otrzymuje się nową konstrukcję, tzw. **strukturę terminową zmienności stóp procentowych** (*term structure of volatility of interest rates*). W ten sposób każdej krzywej stóp dochodu odpowiada krzywa zmienności tych stóp.

2. Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych – klasyfikacja

Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych (a tym bardziej struktury terminowej zmienności stóp procentowych) jest jednym z najważniejszych i najtrudniejszych zagadnień w finansach. W teorii powstało i w praktyce stosowanych jest wiele modeli. Poniżej przedstawimy ich syntetyczną klasyfikację. Na wstępie warto dodać, iż postuluje się, aby modele struktury terminowej stóp procentowych spełniały dwa warunki:

– odzwierciedlały stopy procentowe występujące na rynku, a przede wszystkim typowe zmiany stóp procentowych obserwowane na rynkach finansowych;
– odnosiły się do niektórych teorii stóp procentowych wypracowanych na gruncie finansów.

Jeśli chodzi o pierwszy warunek, to warto zauważyć, że obserwacje historycznych stóp procentowych występujących na rynkach finansowych doprowadziły do wyodrębnienia kilku prawidłowości. Są one następujące:

– stopy procentowe w długim okresie charakteryzują się efektem „powrotu do średniej", tzn. „powrotem" do pewnego przeciętnego długookresowego poziomu;
– zmiany stóp procentowych dotyczących różnych okresów nie są z sobą bardzo mocno skorelowane;
– zmienność stóp procentowych krótkoterminowych jest większa niż zmienność stóp procentowych długoterminowych;
– występuje skorelowanie między poziomem stóp procentowych i zmiennością stóp procentowych.

Oprócz tych wymienionych prawidłowości, badania zmian stóp procentowych doprowadziły do identyfikacji trzech podstawowych rodzajów zmian struktury terminowej stóp procentowych, którym na rysunku odpowiadają zmiany krzywej dochodowości. Zmiany te są następujące:

– przesunięcie równoległe krzywej – w tym wypadku stopy krótkoterminowe, średnioterminowe i długoterminowe zmieniają się (rosną lub spadają) o tę samą wartość;
– zmiana nachylenia krzywej – w tym wypadku stopy krótkoterminowe rosną (spadają) o mniej niż stopy średnioterminowe, zaś te rosną (spadają) o mniej niż stopy długoterminowe, lub stopy krótkoterminowe rosną (spadają) o więcej niż stopy średnioterminowe, zaś te rosną (spadają) o więcej niż stopy długoterminowe – krzywa dochodowości staje się mniej, lub bardziej stroma;
– zmiana krzywizny krzywej – w tym wypadku stopy krótkoterminowe i długoterminowe zmieniają się więcej lub mniej niż stopy średnioterminowe – krzywa dochodowości zmienia swoją krzywiznę na większą, lub mniejszą.

Okazuje się, że te trzy rodzaje zmian traktowane łącznie (np. jednoczesne przesunięcie, zmiana nachylenia i zmiana krzywizny) stanowią zdecydowaną część (nawet około 95%) wszystkich zmian krzywej dochodowości.

Jeśli z kolei chodzi o drugi warunek, tzn. odzwierciedlanie wypracowanych teorii stóp procentowych, to należy stwierdzić, że pod uwagę brane są następujące teorie: teoria oczekiwań, teoria preferencji płynności, teoria preferowanego środowiska (por. Martellini, Priaulet, Priaulet 2003). Czwarta znana teoria struktury terminowej stóp procentowych, mianowicie teoria segmentacji rynku, nie bierze pod uwagę zależności między stopami procentowymi dotyczącymi różnych okresów, a zatem nie ma związku z modelami struktury terminowej stóp procentowych.

Jak już wskazano, powstało bardzo wiele modeli struktury terminowej stóp procentowych. Modele te mają różny rodowód, różny stopień skomplikowania różne koncepcje u podstaw. Analiza modeli proponowanych w literaturze, a również tych stosowanych w praktyce doprowadziła nas do wyróżnienia dwóch podstawowych klas modeli:

1. Modele aproksymacji krzywej dochodowości.
2. Modele dynamiki stóp procentowych.

Modele aproksymacji krzywej dochodowości polegają na wyznaczeniu pewnej funkcji, która przybliża dane empiryczne, tzn. stopy dochodu odpowiadające pewnym okresom. Otrzymana funkcja umożliwia określenie stóp dochodu dla dowolnych okresów. Można powiedzieć, że są to w pewnym sensie modele statyczne, wyjaśniające obecną strukturę terminową stóp procentowych.

Modele dynamiki stóp procentowych wychodzą od pewnego ogólnego modelu, opisującego dynamikę stóp procentowych, a następnie na podstawie danych empirycznych dokonuje się estymacji parametrów. Są to, jak zresztą nazwa wskazuje, modele dynamiczne, wyjaśniające zmiany struktury terminowej stóp procentowych.

Przejdziemy teraz do syntetycznej prezentacji modeli należących do tych dwóch klas. Jedyny wyjątek uczynimy dla najbardziej rozwiniętych modeli, mających u podstaw stochastyczne równania różniczkowe, które przedstawimy nieco szerzej.

W klasie **modeli estymacji krzywej dochodowości** wyróżnić można trzy podstawowe rodzaje modeli:

– bezpośrednie;
– aproksymacji segmentowej;
– aproksymacji całej krzywej dochodowości.

Modele bezpośrednie polegają na wyznaczeniu stóp *spot* (zerokuponowych) na podstawie stóp dochodu obligacji kuponowych. Zastosowanie ma tu następujące elementarne równanie, którego dwie strony odzwierciedlają dwa sposoby wyceny instrumentów dłużnych za pomocą metody zdyskontowanych przepływów pieniężnych:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_t)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+YTM)^t} .$$

Po lewej stronie równania występują nieznane stopy *spot*, zaś po prawej stronie znane stopy dochodu obligacji kuponowych (ich liczba powinna być równa liczbie wyznaczanych stóp *spot*). Wyznaczanie stóp *spot* polega na rozwiązaniu przedstawionego układu równań.

Modele aproksymacji segmentowej polegają na podziale przedziału czasowego na kilka segmentów, a następnie konstrukcji krzywej dochodowości na podstawie danych empirycznych dla każdego segmentu. Przy tym najczęściej dzieli się przedział czasowy na trzy segmenty, odpowiadające odpowiednio: stopom krótkoterminowym (1 dzień – 1 rok), stopom średnioterminowym (1 rok – 10 lat), stopom długoterminowym (powyżej 10 lat). Jeśli zaś chodzi o funkcje aproksymujące, to najczęściej stosowane są wielomiany lub funkcje wykładnicze.

Modele aproksymacji całej krzywej dochodowości polegają na zastosowaniu pewnej funkcji opisującej wszystkie stopy procentowe, przy czym parametry tej funkcji mają klarowną z praktycznego punktu widzenia interpretację. Można tutaj wyróżnić wiele możliwych modeli, jednak największą popularność zdobyły dwa następujące:

1. Model Nelsona-Siegela (Nelson, Siegel 1987), dany wzorem:

$$r_m = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{1 - \exp(-m/\delta_1}{m/\delta_1} \right) + \beta_2 \exp\left(\frac{1 - \exp(-m/\delta_1}{m/\delta_1} - \exp(m/\delta_1 \right) + u,$$

gdzie u jest to składnik losowy, zaś poszczególne parametry mają następującą interpretację:

β_0 – długoterminowa stopa procentowa,

β_1 – spread między stopą długoterminową a stopą krótkoterminową,

β_2 – stopień krzywizny krzywej dochodowości,

δ_1 – prędkość, z jaką składnik krótkoterminowy i średnioterminowy krzywej zdążają do zera.

2. Model Svenssona (Svensson 1994), dany wzorem:

$$r_m = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{1 - \exp(-m/\delta_1}{m/\delta_1} \right) + \beta_2 \exp\left(\frac{1 - \exp(-m/\delta_1}{m/\delta_1} - \exp(m/\delta_1 \right) +$$
$$+ \beta_3 \exp\left(\frac{1 - \exp(-m/\delta_1}{m/\delta_1} - \exp(m/\delta_1 \right) + u.$$

W porównaniu z modelem Nelsona-Siegela w modelu Svenssona doszły dwa dodatkowe parametry, które pozwalają na większą elastyczność w modelowaniu krzywej (np. uwzględnienie większej ilości „garbów”).

W klasie **modeli dynamiki stóp procentowych** można wyróżnić:

– modele ekonometrii finansowej;
– modele drzew dwumianowych z endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych;
– modele stochastycznych równań różniczkowych z endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych;
– modele drzew dwumianowych, wynikające z koncepcji arbitrażu;
– modele stochastycznych równań różniczkowych, wynikające z koncepcji arbitrażu.

Modele ekonometrii finansowej są to znane modele klasy ARIMA-GARCH, służące do modelowania finansowych szeregów czasowych rozpatrywanych w czasie dyskretnym. W zakresie modelowania poziomu są to modele warunkowej wartości oczekiwanej ARIMA oraz ich modyfikacje i uogólnienia. W zakresie modelowania zmienności są to modele warunkowej wariancji GARCH oraz ich modyfikacje i uogólnienia. W tym wypadku modelowana zmienna jest to oczywiście stopa procentowa.

Następne dwa rodzaje modeli charakteryzują się tzw. endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych. Oznacza to, że jest zadany pewien hipotetyczny model, zaś jego parametry szacowane są na podstawie danych empirycznych. W pierwszej grupie tego typu modeli dynamika stóp procentowych opisywana jest za pomocą drzew dwumianowych. Zakłada się, że na koniec każdego okresu, należącego do rozpatrywanego przedziału czasowego, stopa procentowa może przyjąć dwie wartości (każdą z jednakowym prawdopodobieństwem). Przy rozpatrywaniu wielu okresów dynamika stóp procentowych może być w sposób graficzny przedstawiona za pomocą drzewa, co wyjaśnia nazwę metody.

W drugiej grupie modeli z endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych, dynamika ta jest opisana modelem w postaci stochastycznego równania różniczkowego. Opis tego typu modeli zawarty jest w następnym punkcie tego artykułu.

Z kolei dwa ostatnie rodzaje modeli charakteryzują się tym, iż wywodzą się z koncepcji braku arbitrażu. Koncepcja braku arbitrażu oznacza, iż dokonuje się wyceny instrumentów finansowych w taki sposób, aby nie był możliwy arbitraż, tzn. strategia, która nie wymaga nakładów, jest wolna od ryzyka i daje dodatni przychód. Przy tym otrzymany model jest zgodny z obserwowanymi rzeczywistymi stopami procentowymi, a nie wynika z endogenicznie określonej dynamiki stóp.

Również tutaj można wyróżnić dwa rodzaje modeli. Pierwszy rodzaj do opisu dynamiki wykorzystuje drzewa dwumianowe. Z kolei drugi rodzaj wynika ze stochastycznych równań różniczkowych. Modelom tego typu poświęcony jest następny punkt tego artykułu.

Warto na zakończenie dodać, że w przypadku wszystkich powyżej wymienionych modeli na podstawie określonej struktury terminowej stóp procentowych można dokonać wyceny instrumentów dłużnych oraz wyceny instrumentów pochodnych na stopę procentową, takich jak: opcje *cap*, *floor*, *swaption*.

3. Modele dynamiki stóp procentowych, wynikające ze stochastycznych równań różniczkowych

Najbardziej zaawansowane modele struktury terminowej to te, w których dynamika stóp procentowych opisana jest za pomocą stochastycznego równania różniczkowego. Są to zatem modele w czasie ciągłym, inne niż większość dotychczas rozpatrywanych modeli, w których czas był dyskretny.

Na początku przedstawimy trzy najczęściej stosowane w finansach typy modeli zapisanych w postaci stochastycznych równań różniczkowych. Przy tym oprócz klasycznej postaci modelu podamy również wersję dyskretną, w której zakłada się, że czas może się zmieniać o jednostkę. Podstawowe modele są następujące (dla uproszczenia nie wprowadza się w oznaczeniach osobnego indeksu dla okresu, którego dotyczy stopa, zaś indeks przy stopie procentowej oznacza dany moment czasowy):

1. Geometryczny ruch Browna, dany wzorem:

$$dr_t = \mu r_t dt + \sigma r_t dZ_t \ ,$$

zaś w wersji dyskretnej (po przekształceniach):

$$r_{t+1} = (1 + \mu)r_t + \sigma r_t \varepsilon_{t+1}.$$

2. Proces pierwiastkowy, dany wzorem:

$$dr_t = \mu r_t dt + \sigma\sqrt{r_t dZ_t},$$

zaś w wersji dyskretnej (po przekształceniach):

$$r_{t+1} = (1 + \mu)r_t + \sigma\sqrt{r_t \varepsilon_{t+1}}.$$

3. Proces Ornsteina-Uhlenbecka (charakteryzujący się właściwością powrotu do średniej), dany wzorem:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dZ_t,$$

zaś w wersji dyskretnej (po przekształceniach):

$$r_{t+1} + \kappa\theta + (1 - \kappa)r_t + \sigma\varepsilon_{t+1}.$$

Jak wynika z ostatniego wzoru, proces Ornsteina-Uhlenbecka charakteryzuje się właściwością powrotu do średniej – stopa procentowa w danym momencie jest skorygowaną o składnik losowy ważoną średnią dwóch wielkości: długoterminowej stopy procentowej oraz stopy procentowej z poprzedniego momentu. Przy tym waga przyporządkowana długoterminowej stopie procentowej jest interpretowana jako prędkość powrotu do tej średniej długookresowej.

Powyżej przedstawione modele znalazły swoje poczesne miejsce w konkretnych wersjach modeli stóp procentowych z endogenicznie określoną dynamiką. Modeli tych jest wiele, a dzieli się je zazwyczaj w zależności od liczby czynników, które są modelowane. W najwcześniej zaproponowanych modelach jednoczynnikowych jedynym modelowanym czynnikiem jest tzw. krótkoterminowa stopa procentowa, czyli chwilowa stopa *spot*. Jeśli modelowanych czynników jest więcej, wówczas pod uwagę bierze się na przykład zmienność krótkoterminowej stopy procentowej i średnią stopę długookresową.

Ograniczone łamy tego artykułu nie pozwalają na szerokie omówienie modeli stochastycznych równań różniczkowych z endogenicznie określoną dynamiką stóp procentowych. Przedstawimy jedynie kilka najbardziej popularnych modeli, wskazując na modelowane czynniki.

1. Modele jednoczynnikowe – modelowana jest krótkoterminowa stopa procentowa:
   – model Vasicka (Vasicek 1977):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dZ_t,$$

   – model Coxa-Ingersolla-Rossa (Cox, Ingersoll, Ross 1985):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t dZ_t},$$

2. Modele dwuczynnikowe – modelowana jest krótkoterminowa stopa procentowa i zmienność tej stopy:
   – model Fonga i Vasicka (Fong, Vasicek 1991):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{v_t dZ_t}$$

$$dv_t = \gamma(\vartheta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t dZ_{2t}}\ .$$

3. Modele trójczynnikowe – modelowana jest krótkoterminowa stopa procentowa, zmienność tej stopy oraz średnia długoterminowa:

   – model Chena (Chen 1996):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{r_t}\, dZ_{1t}$$

$$dv_t = \gamma(\vartheta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}\, dZ_{2t}$$

$$d\theta_t = \varphi(\lambda - \theta_t)dt + \eta\sqrt{\theta_t}\, dZ_{3t}\ .$$

Jak widać, we wszystkich powyżej przedstawionych modelach rozpatrywane procesy są to kombinacje procesów Ornsteina-Uhlenbecka z procesami pierwiastkowymi.

Pewną wadą przedstawionych modeli jest jednak to, iż dynamika stóp procentowych jest określana endogenicznie, co oznacza, że nawet w przypadku wieloczynnikowych modeli obecna struktura terminowa stóp procentowych, dana w postaci stóp dochodu obligacji, niekoniecznie musi być odzwierciedlona w sposób dokładny.

Z tą niedogodnością próbują sobie radzić modele arbitrażowe. Jak już wskazywaliśmy, są dwie grupy takich modeli. Jedna grupa wykorzystuje wspomnianą już koncepcję drzew dwumianowych. Pierwszy i najbardziej znany model tej klasy został zaproponowany przez Ho i Lee (Ho, Lee 1986).

Druga grupa modeli arbitrażowych wykorzystuje stochastyczne równania różniczkowe. Pierwszym i najbardziej znanym modelem tej klasy jest model Heatha-Jarrowa-Mortona (Heath, Jarrow, Morton 1992). W modelu tym przedmiotem zainteresowania jest chwilowa stopa terminowa, a zatem tak naprawdę modelowana jest jednocześnie cała struktura terminowa stóp procentowych. Okazuje się przy tym, że wiele modeli powstałych wcześniej może być potraktowanych jako szczególne przypadki modelu Heatha-Jarrowa-Mortona.
W najbardziej ogólnej wersji model ten można zapisać następująco:

$$dr_{t,T} = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dZ_t\ .$$

Jak widać, w tym modelu zmiany chwilowej stopy *forward* są funkcją chwilowego dryfu i chwilowej zmienności tej stopy.

Po powstaniu modelu Heatha-Jarrowa-Mortona powstały inne bardziej rozwinięte modele. Część spośród nich skonstruowana jest w ten sposób, iż odzwierciedla obserwowane na rynkach finansowych ceny instrumentów pochodnych na stopę procentową, takich jak *cap*, *floor* i *swaption*. Klasyczne modele tej klasy to te, których autorami są Brace, Gątarek, Musiela (1997) i Jamshidian (1997).

W artykule przedstawiono w sposób syntetyczny najważniejsze grupy modeli struktury stóp procentowych. Każdy z tych modeli musi być w jakiś sposób wyznaczony, tzn. estymowany i/lub kalibrowany na podstawie danych obecnych i historycznych. Prowadzi to do konkretnych wyzwań pod adresem ekonometrii. To właśnie ekonometria dostarcza przecież narzędzi służących do weryfikacji hipotez stawianych przez teorię ekonomii – w tym wypadku modeli stóp procentowych zaproponowanych przez teorię finansów.

Bibiografia

Brace A., Gątarek D., Musiela M. (1997), *The market model of interest rate dynamics*, „Mathematical Finance" 7, s. 127–155

Chen L. (1996), *Stochastic mean and stochastic volatility – a three factor model of the term structure of interest rates and its applications in derivatives pricing and risk management*, „Financial Markets, Institutions and Instruments" 5, s. 1–87

Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985), *A theory of term structure of interest rates*, „Econometrica" 53, s. 385–407

Fong H.G., Vasicek O.A. (1991), *Fixed-income volatility management*, „Journal of Portfolio Management" 17, s. 41–46

Heath D., Jarrow R.A., Morton A. (1992), *Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claim valuations*, „Econometrica" 60, s. 77–105

Ho T.S.Y., Lee S.B. (1986), *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*, „Journal of Finance" 41, s. 1011–1029

Jamshidian F. (1997), *LIBOR and swap market models and measures*, „Finance and Stochastics" 1, s. 293–330

Kydland F., Prescott E. (1977), *Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans*, „Journal of Political Economy" 85, s. 473–490

Kydland F., Prescott E. (1982), *Time to build and aggregate fluctuations*, „Econometrica" 50, s. 1345–1377

Martellini L., Priaulet P., Priaulet S. (2003), *Fixed-income securities, valuation, risk management and portfolio strategies*, Wiley, Chichester

Nelson C.R., Siegel A.F. (1987), *Parsimonious modeling of yield curves,* „Journal of Business" 60, s. 473–489

Romer P.M. (1986), *Increasing returns and long-run growth*, „Journal of Political Economy" 94, s. 1002–1037

Solow R.M. (1956), *A contribution to the theory of economic growth*, „Quarterly Journal of Economics" 70, s. 65–94

Svensson L. (1994), *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994,* CEPR Discussion Paper 1051

Vasicek O.A. (1977), *An equilibrium characterization of the term structure*, „Journal of Financial Economics" 5, s. 177–188