ANTONI SMOLUK
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

O POMIARZE WZROSTU GOSPODARCZEGO

Behold! I am making all things new!
(*Revelation 21.5*)

1. Pytanie – czym jest wzrost, rozwój i postęp – ma długą historię. Znaczy to, że są różne odpowiedzi zależne od czasu, miejsca i rozważanego obiektu. Ponadto zawsze mierzymy w jakiejś skali. Rodzaj skali określa mierzone zjawisko. Aby mierzyć rozwój, trzeba w pierwszym rzędzie zdefiniować to pojęcie i wprowadzić jednostkę postępu. Pojęcie wzrostu kojarzy się z porządkiem. Każda relacja porządku ma tę własność, że relacja do niej odwrotna jest także porządkiem. To co jest wzrostem w jednej skali, będzie spadkiem w innej skali. Wzrost kojarzy się z optymalizacją: chcemy mieć więcej, chcemy lepszej jakości. Już w samej zasadzie racjonalnego działania, a zasada ta jest pochodną ogólnego prawa równowagi, jest ukryte pojecie wzrostu. Funkcje monotoniczne – rosnące i malejące – odgrywają w nauce ważną rolę z tego powodu, że uogólniają funkcje i operatory liniowe. Cała teoria użyteczności i preferencji związana jest z wyborem, a wybieramy nie byle jak: zawsze pragniemy najlepszej cząstki. Tak więc teorię optymalizacji, wszystkie metody podejmowania decyzji, można objąć ogólną nauką o rozwoju i wzroście (R.G.D. Allen, 1961; P. Maćkowiak, 2004).

2. Od czasów Smitha znane jest prawo malejącej stopy zysku. Prawo to jest także znane w teorii użyteczności: każda następna jednostka dobra ma mniejszą wartość niż ta wcześniejsza. Każde dziecko wie, że drugie jabłko mniej smakuje niż to pierwsze. Wzrost wydajności pracy jest powodem spadku wartości kapitału. Im więcej dobra, tym jego cena jest niższa. Ceną kapitału jest procent, jaki płacimy za kredyt. Banki szwajcarskie oferują bardzo niski procent za ochronę i przechowanie kapitału. Istnieje nawet procent ujemny. Jest to opłata za ochronę bogactwa. Każda instytucja płaci procent ujemny od swego majątku firmie ochraniającej ten majątek. Kapitał produkcyjny starzeje się moralnie i to zjawisko można także uznać za

ujemny procent od kapitału. Kapitał zachowuje swą wartość jedynie przez odtwarzanie, a powiększa się przez pracę.

Prawo malejącej stopy procentowej. *Rozwój ekonomiczny jest równoważny ze spadkiem ceny kapitału.*

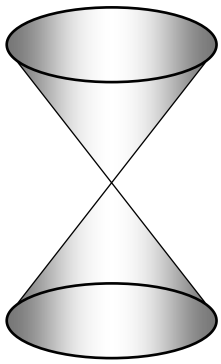
Pomiar wzrostu gospodarczego można na tej zasadzie zredukować do pomiaru stopy procentowej.

3. Doktor Tadeusz Janaszak wprowadził oryginalną definicję wzrostu punktowego funkcji. Jeżeli f ∈ F(R, R), czyli gdy funkcja f odwzorowuje liczby rzeczywiste w zbiór liczb rzeczywistych, to mówimy, że f rośnie w punkcie a ∈ R, gdy istnieje liczba r > 0 spełniająca warunek: jeśli x ∈ [a – r , a], y ∈ [a, a + r], to f(x) ≤ f(y). Okazuje się, że punkt wzrostu lokalnego jest stanem równowagi idealnej; jest nim rzut wierzchołka stożka (rys. 2).

Stożek jest powierzchnią równowagi; jest to rozmaitość algebraiczna wymiaru dwa i stopnia drugiego, dana – we współrzędnych jednorodnych – równaniem:

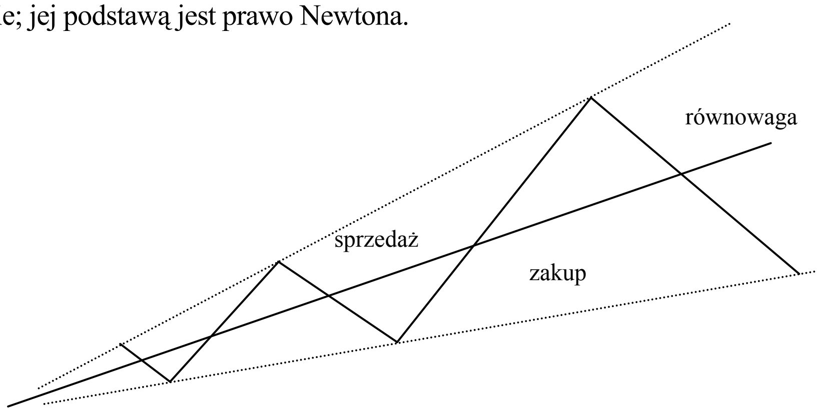
$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_i x_j = 0,$$

gdzie: $a_{ij} = a_{ji}$ oraz $x = x_1/x_4$, $y = x_2/x_4$, $z = x_3/x_4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ oraz $x_4 \neq 0$. Stożek jest więc warstwicą specjalnego wielomianu drugiego stopnia zależnego od trzech zmiennych (rys. 1). Wiedza o formach kwadratowych, wielomianach jednorodnych stopnia drugiego, znajduje nowe i szerokie pole zastosowań. Dotychczas główną dziedziną, w której robiono najgłębszy użytek z form kwadratowych, była teoria względności Alberta Einsteina; forma kwadratowa jest przecież kwadratem odległości w modelu czasoprzestrzennym.



Rys. 1. Stabilność

Drugą dziedziną zastosowań form kwadratowych, równie ważną jak nauka Einsteina, jest ekonomia. Chociaż stożek jest powierzchnią algebraiczną – warstwicą wielomianu, to generuje ją linia śrubowa – krzywa przestępna, niealgebraiczna. Linie śrubowe, z których utkany jest stożek, są torami pyłków w kręcącym się wirze powietrznym. Na giełdzie wiruje punkt równowagi chwilowej; zygzakowate kursy akcji kojarzono z fraktalami. Wydaje się, że piękna teoria samopodobnych obiektów ma luźny związek z zachowaniem się giełdy. Owszem, we wzroście ślimaka jest uwzględnione samopodobieństwo, jednakowoż istotą jest ruch wirowy i spirala wyznaczona przez powiększający się organizm. Ze sprawozdań giełdowych bardzo dobrze znamy linie poligonalne – wykresy kursów akcji. *Novum* jest w podwyższaniu wymiaru o jeden: zamiast szeregu (czas, cena) rozpatruje się dwa szeregi, czyli szereg dwuwymiarowy, (czas, cena, wolumen). Zygzaki te powstają z rzutu ortogonalnego linii śrubowej nawiniętej na stożek, gdy rzutnią jest płaszczyzna przechodząca przez oś stożka (rys. 2) i równoległa do układu osi (czas, cena). Jeżeli punkt równowagi chwilowej leży powyżej osi stożka, wtedy na sprzedaży akcji zarabiamy, a gdy poniżej, to zarabiamy na kupnie. Jeśli rzutnią jest płaszczyzna prostopadła do osi stożka, wtedy otrzymujemy spiralę logarytmiczną. Model ten objaśnia, dlaczego liczba złota $\chi = (\sqrt{5} - 1)/2$ jest powszechna w przyrodzie; jej podstawą jest prawo Newtona.



Rys. 2. Spekulacje

Totalny ruch wirowy w przyrodzie jest rezultatem prawa powszechnej równowagi. Równowaga chwilowa, częściowa, zmienia się nieprzerwanie; świat na drodze do swego przeznaczenia ciągle się formuje i deformuje. Czy celem bytu – jak chciał Heraklit – jest ruch właśnie? Wszystko faluje, drga i wiruje, zmiana pociąga zmianę, nie ma punktu stałego: *παντα ρει* – wszystko płynie. Wydaje się, że ruch jest jedynym celem natury. *Ruch jest wszystkim*, *cel jest niczym*. Jednak ta anarchistyczna teza jest wnioskiem bardzo pesymistycznym: antynaukowym i antyreligijnym. Wierzchołek stożka, leżący na osi równowagi, jest punktem wzrostu według dr. Janaszaka. W tym punkcie równowaga idealna pokrywa się z wirującym na stożku punktem równowagi chwilowej (A. Smoluk, 2003).

4. Niech X oznacza zbiór uporządkowany; funkcja $f \in F(X, X)$ nazywa się funkcją rosnąca, jeżeli spełnia warunek: jeśli $x \le y$, to $f(x) \le f(y)$. Mówimy, że f ma punkt stały, jeżeli w zbiorze X istnieje a takie, że $f(a) = a$. Zakładamy w dalszym ciągu, że X jest zbiorem skończonym.

Twierdzenie. *Jeżeli istnieje sup X lub inf X, to każda funkcja rosnąca ma punkt stały.*

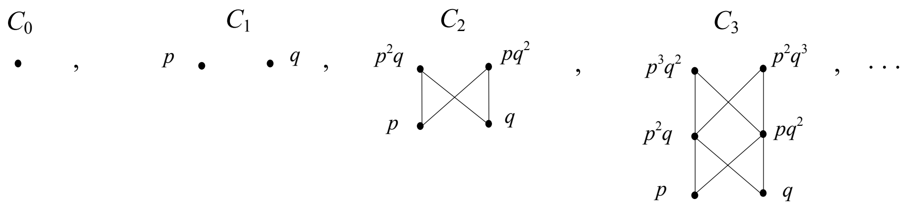
Twierdzenie to łatwo się dowodzi; wystarczy zauważyć, że każdy ciąg rosnący w zbiorze skończonym musi być od pewnego miejsca stały. Funkcje rosnące będziemy także nazywać homomorfizmami. Zbiór wszystkich homomorfizmów oznaczamy symbolem Hom(X). Mówimy, że zbiór uporządkowany X ma własność punktu stałego, jeżeli każdy homomorfizm ma punkt stały.

Jeżeli f jest homomorfizmem, to zbiór Y = im f nazywa się obrazem homomorfizmu f. Obraz homomorfizmu nazywamy niezmienniczym, jeśli ma on własność punktu stałego, gdy X miał tę własność i nie ma własności punktu stałego, gdy X jej nie miał. Obrazy są uporządkowane przez relację włożenia. Obraz Y jest mniejszy lub równy od obrazu Z, gdy istnieje rosnący różnowartościowy homomorfizm g wkładający Y w Z.

5. Jak scharakteryzować wszystkie skończone zbiory uporządkowane, mające własność punktu stałego? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wprowadzimy na początek specyficzne zbiory uporządkowane – zwane koronami. Każdy skończony zbiór uporządkowany ma model w zbiorze liczb naturalnych z relacją podzielności jako porządkiem (A. Smoluk, 1997). W dalszym ciągu ograniczymy się do takich zbiorów.

Definicja. *Niech p i q będą dwiema różnymi liczbami pierwszymi, na przykład* $p = 2$ *i* $q = 3$*; połóżmy z definicji* $C_0 = \{1\}$ *oraz* $C_{n+1} = \{p^{k+1} q^k, p^k q^{k+1} : k \in \{0, ..., n\}\}$ *dla dowolnej liczby naturalnej n.*

Jest to indukcyjna definicja ciągu zbiorów uporządkowanych zwanych koronami. Tylko korona C_0 ma własność punktu stałego; pozostałe korony tej własności nie mają (rys. 3). Korona C_1 nie jest zbiorem spójnym – spójnym w sensie porządkowym.



Rys. 3. Korony

Podzbiór A zbioru X jest zbiorem niezmienniczym, jeżeli istnieje funkcja rosnąca $f \in$ Hom(X), której obrazem jest zbiór A, czyli $A = f(X)$, oraz zbiory uporządkowane A i X jednocześnie mają, albo nie mają, własności punktu stałego. Rodzina $I(X)$ wszystkich inwariantnych podzbiorów zbioru X jest po pierwsze niepusta: cały zbiór X jest inwariantnym podzbiorem, a po drugie jest uporządkowana przez relację włożenia; inwariantne zbiory izomorficzne utożsamia się. W rodzinie $I(X)$ istnieje tylko jeden element minimalny (A. Smoluk, 1997a).

Uwaga. *Zbiór X ma własność punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy elementem minimalnym jest korona* C_0.

Twierdzenie. *Element minimalny jest zawsze pewną koroną.*

Dowód tego twierdzenia rozbijemy na kilka kroków. Niezmienniczy zbiór minimalny *ex definitione* nie ma mniejszego obrazu; jeżeli więc A jest minimalnym zbiorem inwariantnym i zbiór X nie ma własności punktu stałego, to każdy mniejszy obraz zbioru A ma własność punktu stałego. Jeżeli A jest inwariantnym zbiorem minimalnym oraz funkcja $f \in M(A)$ nie ma punktu stałego, to f jest automorfizmem. Zbiór A dzieli się na rozłączne orbity $O(a) = \{f^k(a); k \in Z\}$, gdzie $a \in A$. Rodzina orbit jest zbiorem uporządkowanym: $O(a) \leq O(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x \in O(a)$ takie, że $x \leq b$. Pokażemy, że ten porządek w zbiorze jest liniowy. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją trzy orbity: $O(a)$, $O(b)$ i $O(c)$ takie, że orbity $O(a)$ i $O(b)$ są bezpośrednio większe od orbity $O(c)$, a między sobą nieporównywalne; wtedy, utożsamiając orbity $O(a)$ i $O(b)$, otrzymujemy mniejszy zbiór inwariantny, czyli sprzeczność. Oczywiście każde dwie orbity są równoliczne; w przeciwnym razie tę większą można by było ściągnąć, sklejając jej punkty tak, by stała się równoliczna z tą drugą. W wyniku tego otrzymujemy także mniejszy zbiór inwariantny. Orbita jest zbiorem dwupunktowym; w przeciwnym razie punkty orbity można skleić; otrzymamy wtedy mniejszy zbiór inwariantny. Przeczy to definicji zbioru A. Podane tu argumenty kończą dowód twierdzenia.

Skończone zbiory uporządkowane reprezentują struktury organizacyjne. Reorganizacja i restrukturyzacja zawsze kojarzy się ze wzrostem wydajności: przyśpiesza to rozwój podobnie jak inwestycje. Przy zachowaniu tych samych funkcji najwydajniejszą jest instytucja o najprostszej strukturze. Modelem struktury hierarchicznej jest zbiór skierowany w prawo – dla każdych dwóch pracowników istnieje nadzorca, a modelem reorganizacji jest homomorfizm. Mowa tu o specjalnych reorganizacjach – homomorfizm jest bowiem funkcją rosnącą – przy których struktura hierarchiczna jest zachowana; liczba zatrudnionych może się zmniejszyć, ale zależności służbowe nie ulegają odwróceniu. Otóż przy takiej reorganizacji zawsze istnieje przynajmniej jedna osoba, która zachowa swoje poprzednie stanowisko. Twierdzenie to można nazwać zasadą stabilności biurokracji.

Bibliografia

R.G.D. Allen (1961), *Ekonomia matematyczna,* PWN, Warszawa

P. Maćkowiak (2004), *Optymalne trajektorie wzrostu w wielosektorowej gospodarce typu Ramseya*, praca doktorska; promotor: Emil Panek. Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Wydział Ekonomii, Katedra Ekonomii Matematycznej

A. Smoluk (1997), *Czy ekonomia jest nauką o podzielności*? „Ekonomia Matematyczna“ 1, s. 11–16

A. Smoluk (1997a), *Minimalne zbiory inwariantne a własność fixpunktu*, „Ekonomia Matematyczna” 1, s. 17–30

A. Smoluk (2003), *Słowo wstępne*, *czyli eppur si muove*! „Ekonomia Matematycna” 7, s. 5–8